応用解析学の基礎

複素解析，フーリエ解析・ラプラス変換

解答・解説

1　正則関数

$\boxed{\text{問 1.1}}$　複素数の乗法，除法の公式が成立することを確かめよ．

【解答】　$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とする．

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad \square \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \square \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 1.2}}$　式 (1.3)〜(1.5) の関係が成立することを確かめよ．

【解答】　まず，式 (1.3)，(1.4) について，$z = x + iy$ とする．

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z \quad \square \\ \frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{(x+iy) + (x-iy)}{2} = x = \mathrm{Re}\ z \quad \square \\ \frac{z - \overline{z}}{2} &= \frac{(x+iy) - (x-iy)}{2} = y = \mathrm{Im}\ z \quad \square \end{aligned}$$

次に，式 (1.5) について，$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とする．

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= x_1(x_2 - iy_2) - iy_1(x_2 - iy_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1}\,\overline{z_2} \quad \square \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} = \overline{\left(\frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 - iy_1)}{(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \square \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 1.3}}$　式 (1.8)〜(1.13) の関係が成立することを確かめよ．

【解答】式 (1.8) について，$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ とおくと，

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\ &= (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 - (x_1y_2)^2 - (x_2y_1)^2 \\ (|z_1|\,|z_2|)^2 &= (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) \\ &= (x_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 - (x_1y_2)^2 - (x_2y_1)^2 \\ \therefore\ |z_1 z_2| &= |z_1|\,|z_2| \quad (\because\ |z_1 z_2| \geqq 0 \land |z_1|\,|z_2| \geqq 0) \quad \square \end{aligned}$$

また，非負実数 r_1, r_2，実数 α, β を用いて $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ とする．
このとき，$\arg z_1 = \alpha, \arg z_2 = \beta$ であるので，$\arg z_1 + \arg z_2 = \alpha + \beta$．

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left\{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\right\}$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$
$$\therefore\ \arg z_1 z_2 = \alpha+\beta = \arg z_1 + \arg z_2 \quad \square$$

式 (1.9) について，z_1, z_2 を式 (1.8) のときと同様におくと，

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 &= |z_1|^2 \left|\frac{1}{z_2}\right|^2 \\ &= (x_1^2+y_1^2)\cdot\frac{x_2^2+y_2^2}{(x_2+y_2)^2} \\ &= \frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2} \\ &= \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \\ \therefore\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \left(\because\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \geqq 0 \land \frac{|z_1|}{|z_2|} \geqq 0\right) \quad \square\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin sin\beta)\right) \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right)\end{aligned}$$
$$\therefore\ \arg\frac{z_1}{z_2} = \alpha-\beta = \arg z_1 - \arg z_2 \quad \square$$

式 (1.10) について，非負実数 r，実数 θ を用いて $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，

$$\left|\overline{z}\right| = |r(\cos\theta - i\sin\theta)| = r\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = r = |z|$$
$$\arg\overline{z} = \arg r(\cos\theta - i\sin\theta) = \arg r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = -\theta = -\arg z \quad \square$$

式 (1.11) について，$z = x+iy$ とおくと，

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z| \quad \square$$

式 (1.12) について，$z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ とおく．まず，

$$|z_1+z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \quad \cdots\cdots ①$$

を示す．

$$|z_1+z_2|^2 = (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2$$
$$(|z_1| + |z_2|^2) = x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

から，① $\iff x_1x_2 + y_1y_2 \leqq \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$ となり，この不等式はコーシー・シュワルツの不等式より成立する．
次に，

$$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1+z_2|$$

を示す．① の z_1+z_2 を X に，z_1 を $-Y$ に置き換えると，z_2 は $X+Y$ に置き換わり，

$$|z_1| \leqq |z_1+z_2| + |z_2| \iff -|X| + |Y| \leqq |X+Y| \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

を得る．また，① の z_1+z_2 を $-Y$ に，z_1 を X に置き換えると，z_2 は $-X-Y$ に置き換わり，

$$|z_1| \leqq |z_1+z_2| + |z_2| \iff |X| - |Y| \leqq |X+Y| \quad \cdots\cdots \text{Ⓘ}$$

したがって，Ⓐ, Ⓘ より，$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1+z_2|$ が示される．よって，式 (1.12) は成立する．

式 (1.13) について,

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2+\cdots+z_n+z_{n+1}| &\leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|+|z_{n+1}| \quad (\because \text{ 式 } (1.12))\\ &\leqq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+|z_{n+1}| \quad (\because \text{ 仮定})\end{aligned}$$

以上の不等式と式 (1.12) を合わせて，数学的帰納法から式 (1.13) が成立する．

問 1.4　$w=z^2$ により，z 平面上の両軸に平行な 2 つの直線 $x=a, y=b$ は，それぞれ w 平面上のどのような曲線に写されるか調べてみよ．

【解答】　直線 $x=a$ は $z=a+iy$，直線 $y=b$ は $z=x+ib$ と表せ，実数 u, v を用いて $w=u+iv$ とすると,

直線 $x=a$ について,

$$w=z^2=(a+iy)^2=a^2-y^2+2iay$$
$$\therefore\ u=a^2-y^2,\ v=2ay$$

$a=0$ のとき,
$u=-y^2, v=0$ なので, u 軸上の 0 以下の部分である．

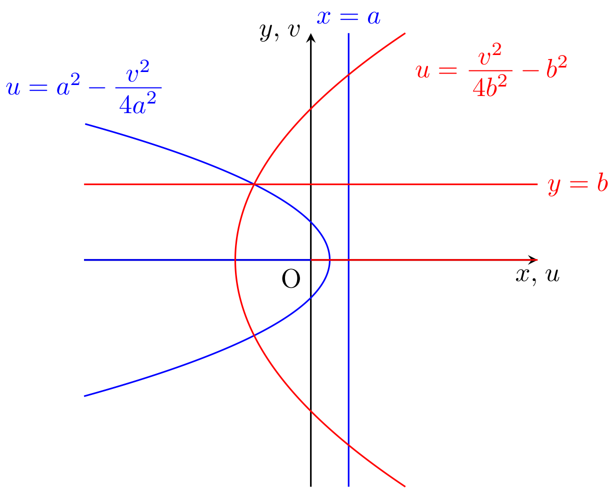
$a\neq 0$ のとき,
$u=a^2-\dfrac{v^2}{4a^2}$ の放物線である．

直線 $y=b$ について,

$$w=z^2=(x+ib)^2=x^2-b^2+2ibx$$
$$\therefore\ u=x^2-b^2,\ v=2bx$$

$b=0$ のとき,
$u=x^2, v=0$ なので, u 軸上の 0 以上の部分である．

$b\neq 0$ のとき,
$u=\dfrac{v^2}{4b^2}-b^2$ の放物線である．



適切ではないが z 平面と w 平面を同時に描いている．

問 1.5　上記のことを証明せよ．

【解答】　図を考えると,

$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)| \leqq |f(z)-f(z_0)| \leqq |u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|$$
$$|v(x,y)-v(x_0,y_0)| \leqq |f(z)-f(z_0)| \leqq |u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|$$

より, $f(z)$ が点 z_0 で連続，すなわち $\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0))=0$ となるためには，はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to x_0,\, y\to y_0}(u(x,y)-u(x_0,y_0))=0 \wedge \lim_{x\to x_0,\, y\to y_0}(v(x,y)-v(x_0,y_0))=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が必要条件である．逆に，① のとき,

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0))=\lim_{x\to x_0,\, y\to y_0}(u(x,y)-u(x_0,y_0))+i\,(v(x,y)-v(x_0,y_0))=0$$

より成り立つ．以上から $f(z)$ が $z_0=x_0+iy_0$ で連続であるための必要十分条件は，2 つの実変数関数 $u(x,y), v(x,y)$ が，ともに (x_0,y_0) で連続であることである．

問 1.6　上記のことを証明せよ．

【解答】 関数 $f(z)$ が微分可能であるとき，

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在し，この極限値が存在するための必要条件は，

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$$

である．すなわち関数 $f(z)$ が z_0 で微分可能であるために，$f(z)$ が z_0 連続であることが必要なので，題意は示された．

$\boxed{\text{問 } 1.7}$ $f(z) =$ 定数 のとき，$f'(z) = 0$ となることを示せ．また，$f(z) = z^{-n}(n : \text{正整数}, z \neq 0)$ のとき，$f(z) = 1/z^n$ に商の微分法の公式を用いて，$f'(z) = -nz^{-n-1}$ となることを示せ．

【解答】 a を定数として，$f(z) = a$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{a - a}{\Delta z} \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

次に，$f(z) = z^{-n}(n : \text{正整数}, z \neq 0)$ のときと同様におくと，

$$f'(z) = \frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1} \quad \square$$

$\boxed{\text{問 } 1.8}$ $u = x^2 - y^2$ を実部にもつ正則関数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ を求めよ．

【解答】 $f(z) = u + iv$ とおくと，コーシー・リーマンの方程式より，

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

が成立する．第 1 式を積分すると，$\phi(x)$ を x の任意の関数として，

$$v = 2xy + \phi(x)$$

となる．これを第 2 式に代入すれば，

$$2y + \phi'(x) = 2y \quad \therefore\ \phi'(x) = 0$$

となるので，$\phi(x) = C$ (定数) である．したがって，$v = 2xy + C$ であり，$f(z)$ は次のようになる．

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C) = (x + iy)^2 + iC = z^2 + iC$$

$\boxed{\text{問 } 1.9}$ 次の関数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ の正則性を調べ，正則ならその導関数を求めよ．

(1) $f(z) = \bar{z}$　　(2) $f(z) = x^2 + iy^2$　　(3) $f(z) = z^2$

【解答】 (1) $f(z) = x - iy$ より，$u(x, y) = x, v(x, y) = -y$ であるから，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

したがって，$\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$ で，コーシー・リーマンの方程式が成り立たないので，$f(z)$ は正則でない．

(2) $f(z) = x^2 + iy^2$ より，$u(x, y) = x^2, v(x, y) = y^2$ であるから，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

したがって，$\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$ で，コーシー・リーマンの方程式が成り立たないので，$f(z)$ は正則でない．

(3)　$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ より，$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ であるから，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

したがって，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \wedge \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たし，コーシー・リーマンの方程式が成り立つので，$f(z)$ は正則である．このとき，

$$f'(z) = 2x + 2iy = 2z$$

となる．

$\boxed{\text{問 1.10}}$　$w = f(z) = z^2$ は $f'(z) = 0$ となるので，原点では等角写像ではないことを確かめよ．

【解答】　原点を通る 2 つの直線 $C_1(t) = it, C_2(t) = t$ を考える．このとき，

$$f(C_1(t)) = -t^2, \quad f(C_2(t)) = t^2$$

であり，$w = f(z)$ による，$C_1(t)$ と $C_2(t)$ 写像は接するのみで直交しない．
したがって，$w = f(z) = z^2$ は等角写像ではない．

$\boxed{\text{問 1.11}}$　公式 (1.29)，(1.30) を証明せよ．

【解答】　まず，公式 (1.29) について，$z = x + iy$ とおくと，

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z} \quad \square$$

$$\arg e^z = \arg\left(e^x \cdot e^{iy}\right) = \arg e^x(\cos y + i\sin y) = y + 2n\pi = \mathrm{Im}\, z + 2n\pi \ (n: \text{整数}) \quad \square$$

次に，公式 (1.30) について，$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ とおくと，

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\
&= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i\sin y_1 \cos y_2 + i\cos y_1 \sin y_2) \\
&= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{z_1}e^{z_2} \quad \square
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 1.12}}$　加法定理 (1.43) が成立することを確かめよ．

【解答】

$$\begin{aligned}
\cosh(z_1+z_2) &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{2} \\
&= \frac{(e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2}) + (e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2})}{4} \\
&= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \quad \square \\
\sinh(z_1+z_2) &= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{2} \\
&= \frac{(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2}) + (e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2})}{4} \\
&= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sin z_2 \quad \square
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 1.13}}$　公式 (1.44)〜(1.47) が成立することを確かめよ．

【解答】　公式 (1.44) について，

$$\cos(iy) = \frac{e^{i\cdot iy} + e^{-i\cdot iy}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y \quad \square$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i\cdot iy} - e^{-i\cdot iy}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{i(e^{y} - e^{-y})}{2} = i\sinh y \quad \square$$

公式 (1.45) について,

$$\sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \quad \square$$
$$\cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \quad \square$$

公式 (1.46) について,

$$\cosh(iy) = \cos(i\cdot iy) = \cos(-y) = \cos y \quad \square$$
$$\sinh(iy) = -i\sin(i\cdot iy) = -i\sinh(-y) = i\sin y \quad \square$$

公式 (1.47) について,

$$\sinh(x+iy) = \sinh x\cosh(iy) + \cosh x\sinh(iy) = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y \quad \square$$
$$\cosh(x+iy) = \cosh x\cosh(iy) + \sinh x\sinh(iy) = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y \quad \square$$

問 1.14　方程式 $\sin z = i$ を解け.

【解答】 $z = x + iy$ とおく.

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = i$$
$$\therefore\ \sin x\cosh y = 0, \quad \cos x\sinh y = 1$$

第 1 式より, $\sin x = 0$ または $\cosh y = 0$, このとき, $\cosh y > 0$ より $x = m\pi$ (m : 整数) となる. $x = m\pi$ を第 2 式に代入して,

$$\begin{aligned}
\cos x\sinh y = 1 &\iff \cos m\pi\sinh y = 1 \\
&\iff (-1)^m\sinh y = 1 \\
&\iff \sinh y = (-1)^m \\
&\iff e^{y} - e^{-y} = 2\cdot(-1)^m \\
&\iff e^{2y} - 2\cdot(-1)^m e^{y} - 1 = 0 \\
&\iff e^{y} = (-1)^m + \sqrt{2} \quad (\because\ e^{y} > 0) \\
&\iff y = \log_e((-1)^m + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

よって, 求める z の値は $z = m\pi + i\log_e((-1)^m + \sqrt{2})$ (m : 整数) となる.

問 1.15　公式 (1.60)〜(1.62) が成立することを確かめよ.

【解答】 公式 (1.60) について,

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

を変形すれば,

$$(e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

となるので,

$$w = \sin^{-1} z = \frac{1}{i}\log\left(z \pm i\sqrt{1 - z^2}\right) \quad \square$$

公式 (1.61) について,

$$z = \sinh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

を変形すれば,

$$(e^{w})^2 - 2z(e^{w}) - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad e^{w} = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

となるので,

$$w = \sinh^{-1} z = \log\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right) \quad \square$$

公式 (1.62) について,

$$z = \cosh w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$$

を変形すれば,

$$(e^w)^2 - 2z(e^w) + 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad e^w = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

となるので,

$$w = \cosh^{-1} z = \log\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right) \quad \square$$

$\boxed{\text{問 1.16}}$ 次の関数の分岐点を求めよ.

(1) $\log(1+z)$ (2) $\sin^{-1} z$ (3) $\cosh^{-1} z$

【解答】 (1) $1 + z = re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと,

$$w = \log(1+z) = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

$1+z$ が原点のまわりを同じ向きに何回まわっても w は永遠にもとに戻れない.
すなわち分岐点が $z = -1$ の無限多価関数である.

(2) 未

(3) 未

$\boxed{\text{問 1.17}}$ 複素数 $a \neq 0$ に対して, 複素関数 $w = a^z$ を,

$$a^z = e^{z \log a}$$

で定義する. このとき, 次の関係式を示せ.

(1) $a^z = \exp\{z(\log|a| + i\arg a + 2n\pi i)\}$ $(n:$ 整数$)$

(2) $i^i = \exp(-\pi/2 - 2n\pi)$

【解答】 (1) $a = e^{z'}$ とおく. このとき, x, y を実数として $z' = x + iy$ とする.

$$a = |a|\, e^{i\arg a} = e^x \cdot e^{iy}$$
$$\therefore\ |a| = e^x, \quad \arg a + 2n\pi = y \quad (n:\text{整数})$$
$$\therefore\ x = \log|a|, \quad y = \arg a + 2n\pi$$

したがって,

$$\log a = z = \log|a| + i\arg a + 2n\pi i$$
$$\therefore\ a^z = \exp\{z(\log|a| + i\arg a + 2n\pi i)\} \quad (n:\text{整数}) \quad \square$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} i^i &= \exp\{i(\log|i| + i\arg a + 2n\pi i)\} \\ &= \exp\{i(\pi i/2 + 2n\pi i)\} \\ &= \exp(-\pi/2 - 2n\pi) \quad \square \end{aligned}$$

2 複素積分

$\boxed{\text{問 2.1}}$ $f(z) = 2z + 1$ の曲線 $C: z = t + it^2$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に沿っての積分を求めよ.

【解答】

$$\begin{aligned} \int_C (2z+1)\,dz &= \int_0^1 \left\{(2(t+it^2)+1)(1+2it)\right\} dt = \int_0^1 (2t + 2it^2 + 1)(1+2it)\,dt \\ &= \int_0^1 (2t + 6it^2 - 4t^3 + 1 + 2it)\,dt = \Big[t^2 + 2it^3 - t^4 + t + it^2\Big]_0^1 = 1 + 3i \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 } 2.2}$　i と $2+i$ を結ぶ線分を C とおくとき，$\left|\int_C \frac{dz}{z^2}\right| \leqq 2$ を示せ.

【解答】 $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ とする.

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^2}$$

より，C 上で $|f(z)|$ が最大となるのは，$z = i$ のとき $\max|f(z)| = 1$ なので，

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2}\right| \leqq 1\int_C ds = \Big[s\Big]_i^{2+i} = 2 \quad \square$$

$\boxed{\text{問 } 2.3}$　中心 i，半径 1 の円を C とおくとき，次の積分値を求めよ.

$$\int_C \frac{3z+2}{z^2+1}\,dz$$

【解答】 被積分関数を部分分数分解して，コーシーの積分定理を適用すると，

$$\int_C \frac{3z+2}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\int_C \left(\frac{3+2i}{z+i} + \frac{3-2i}{z-i}\right)dz = \frac{1}{2}\left(0 + 2\pi i(3-2i)\right) = \pi(3i+2)$$

$\boxed{\text{問 } 2.4}$　次の定積分を求めよ.

$$(1)\ \int_i^{1+i} z^2\,dz \qquad (2)\ \int_\pi^{\pi i} \sin 2z\,dz$$

【解答】 (1)　関数 $f(z) = z^2$ は全平面で正則 (問 1.9(3) を参照) で，$(z^3/3)' = z^2$ であるから，

$$\int_i^{1+i} z^2\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_i^{1+i} = -\frac{2}{3} + i$$

(2)　関数 $f(z) = \sin 2z$ は全平面で正則 (要証明) で，$(-\cos 2x/2)' = \sin 2z$ であるから，

$$\int_\pi^{\pi i} \sin 2z\,dz = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_\pi^{\pi i} = \frac{1-\cosh 2\pi}{2}$$

［関数 $f(z) = \sin 2z$ が正則であることの証明］

実数 x, y を用いて $2z = x + iy$ とすると，

$$\sin 2z = \sin x + iy = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = -\frac{i}{2}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right\}$$
$$= \frac{(e^y + e^{-y})\sin x}{2} + i\frac{(e^y - e^{-y})\cos x}{2}$$

$\sin 2z$ の実部，虚部をそれぞれ $u(x,y), v(x,y)$ とすると，

$$u(x,y) = \frac{(e^y + e^{-y})\sin x}{2}, \quad v(x,y) = \frac{(e^y - e^{-y})\cos x}{2}$$

より，

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(e^y + e^{-y})\cos x}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(e^y - e^{-y})\sin x}{2}$$

したがって，コーシー・リーマンの方程式を満たすので，$\sin 2z$ は正則である.　□

$\boxed{\text{問 } 2.5}$　定理 2.5 において，C が円：$z = a + re^{i\theta}$ であれば，公式 (2.18) は，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta$$

となり，$f(z)$ の円の中心における値 $f(a)$ は，円周上の $f(z)$ の値の平均に等しくなることを確かめよ.

【解答】 $z = a + re^{i\theta}$ のときと同様におくと，

$$dz = rie^{i\theta}\,d\theta$$

より，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta \quad \square$$

これは，$f(z)$ の円の中心における値 $f(a)$ が，円周上の $f(z)$ の値の平均に等しくなっていることを意味する．

問 2.6　コーシーの積分定理により，問 2.3 の積分を求めよ．

【解答】

$$\int_C \frac{3z+2}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\int_C \left(\frac{3+2i}{z+i} + \frac{3-2i}{z-i}\right) dz = 2\pi i f(i) = 2\pi(2+3i)$$

問 2.3 でもコーシーの積分定理を用いているが，違う種類のものを使用した．

問 2.7　中心 1，半径 1 の円を C とおくとき，

$$\int_C \frac{e^z + z}{(z-1)^4}\,dz = \frac{\pi e}{3}i$$

となることを示せ．

【解答】 $f(z) = e^z + z$ とすると，微分係数の積分公式より，

$$\int_C \frac{e^z + z}{(z-1)^4}\,dz = f^{(3)}(1)\cdot\frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi e}{3}i \quad \square$$

3　複素関数の展開と留数

問 3.1　複素数列 $\{z^n\}$ は $|z| < 1$ のときは 0 に収束するが，$|z| > 1$ のときは ∞ に発散することを示せ．

【解答】 と．$|z| < 1$ のとき，

$$|z^n - 0| = |z|^n \to 0\ (n \to \infty)$$

より 0 に収束する．　$\square$

も．$|z| > 1$ のとき，

$$|z^n| = |z|^n \to \infty\ (n \to \infty)$$

より ∞ に発散する．　$\square$

問 3.2　$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $|z| < 1$ のとき収束し，その和は $1/(1-z)$ となるが，$|z| > 1$ のときは発散することを示せ．

【解答】

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_{N\to\infty}\frac{z^{N+1}-1}{z-1} = \lim_{N\to\infty}\frac{z^N - \dfrac{1}{z}}{1 - \dfrac{1}{z}}$$

より，問 3.1 の結果を用いると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & (|z| < 1 \text{ のとき}) \\ \infty & (|z| > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \square$$

問 3.3　定理 3.5 の逆は必ずしも成立しないという反例を示せ．

【解答】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ は収束するが絶対収束しない．

$\left[級数 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} が収束することの証明 \right]$

$n = 2m-1$ として，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\cdot 2m} > -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)2}$$

$$\therefore\ -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = -\frac{\pi^2}{6} < -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < 0$$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\cdot 2m}$ は下に有界で，単調に減少するので収束する．

問 3.4　定理 3.6，3.7 を証明せよ．

【解答】 定理 3.6 について，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

であり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するので $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ は単調増加で上に有界である．すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する．　□

定理 3.7 について，任意の $\varepsilon > 0$ をとり，条件より，ある $N \geqq 1$ が存在して，

$$n \geqq N \Longrightarrow \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leqq 1 - \varepsilon$$

とできる．したがって，

$$\begin{aligned} |z_{N+k}| &\leqq (1-\varepsilon)\,|z_{N+k-1}| \\ &\leqq \cdots \\ &\leqq (1-\varepsilon)^k\,|z_N| \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N+k} |z_n| &= \sum_{n=1}^{N-1} |z_n| + \sum_{n=0}^{k} |z_{N+n}| \\ &\leqq \sum_{n=1}^{N-1} |z_n| + \sum_{n=0}^{k} (1-\varepsilon)^k\,|z_N| \\ &\leqq \sum_{n=1}^{N-1} |z_n| + \frac{1}{\varepsilon}\,|z_N| \end{aligned}$$

を得る．$k \to \infty$ とすると，右辺は k によらないので，$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する．　□

問 3.5　例 3.1 の (3)，(4) の収束半径が，それぞれ $\rho = \infty, \rho = 2$ となることを確かめよ．

【解答】 例 3.1 の (3) について，

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1) = \infty$$

例 3.1 の (3) について,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(2^n\cdot n^2)}{1/(2^{n+1}\cdot(n+1)^2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+2/n+1/n^2} = 2$$

問 3.6　次の関数の点 $z=0$ のまわりのローラン展開を求めよ.

(1) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$　　(2) $f(z)=z\sin\dfrac{1}{z}$

【解答】 (1)　e^z のマクローリン展開を利用すれば,

$$f(z) = z^{-2}(e^z-1) = z^{-2}\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$= \frac{z^{-1}}{1!}+\frac{z^0}{2!}+\frac{z^1}{3!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{n!}+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

(2)　$\sin z$ のマクローリン展開を利用すれば,

$$f(z) = z\sin\frac{1}{z} = z\left(z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{-2n+1}}{(2n-1)!}+\cdots\right)$$
$$= 1-\frac{z^{-2}}{3!}+\frac{z^{-4}}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{-2n+2}}{(2n-1)!}+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

問 3.7　関数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ を，次の領域でローラン展開せよ.

(1) $0<|z-2|<1$　　(2) $1<|z-2|$

【解答】 $f(z)$ を部分分数に展開すれば,

$$f(z) = -\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

となるので,

(1)　未

(2)　未

問 3.8　次の関数の特異点における留数を求めよ.

(1) $\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$　　(2) $\dfrac{ze^{iz}}{(z-1)^2}$

【解答】 (1)　特異点は $z=\pm i$ で，それぞれ 2 位の極であるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\pm i) &= \lim_{z\to\pm i}\frac{z}{dz}(z\mp i)^2\frac{z}{(z^2+1)^2}\\ &= \lim_{z\to\pm i}\frac{z}{dz}\frac{z}{(z\pm i)^2}\\ &= \lim_{z\to\pm i}\frac{(z\pm i)^2-2z(z\pm i)}{(z\pm i)^4}\\ &= \lim_{z\to\pm i}\frac{(-z^2-1)}{(z\pm i)^4}\\ &= 0\end{aligned}$$

(2)　特異点は $z=1$ で，2 位の極であるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(1) &= \lim_{z\to 1}\frac{z}{dz}(z-1)^2\frac{ze^{iz}}{(z-1)^2}\\ &= \lim_{z\to 1}(e^{iz}+ize^{iz})\\ &= e^i(1+i)\end{aligned}$$

問 3.9　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-1)^2},\quad C:|z|=2$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\,dz,\quad C:|z|=3$

【解答】 (1)　被積分関数は 1 位の極 $z=0$ と 2 位の極 $z=1$ をもち，ともに C 内にある．それぞれの留数は,

$$\mathrm{Res}(0)=\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{1}{z(z-1)^2}=1$$
$$\mathrm{Res}(1)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{1}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{-1}{z^2}=-1$$

となる．したがって，留数定理から,

$$\int_C \frac{dz}{z(z-1)^2}=2\pi i(1-1)=0$$

(2)　被積分関数は 2 つの 2 位の極 $z=2i$ をもち，ともに C 内にある．それぞれの留数は,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(2i)&=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}(z-2i)^2\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\\&=\lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2-2e^{iz}(z+2i)}{(z+2i)^4}=-\frac{3ie^{-2}}{32}\\\mathrm{Res}(-2i)&=\lim_{z\to -2i}\frac{d}{dz}(z+2i)^2\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}=\lim_{z\to -2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z-2i)^2}\\&=\lim_{z\to -2i}\frac{ie^{iz}(z-2i)^2-2e^{iz}(z-2i)}{(z-2i)^4}=-\frac{ie^{2}}{32}\end{aligned}$$

となる．したがって，留数定理から,

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\,dz=2\pi i\left(-\frac{3ie^{-2}}{32}-\frac{ie^2}{32}\right)=\frac{(3e^{-2}+e^2)\pi}{16}$$

問 3.10　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3\sin\theta+5}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\cos^2\theta+3)^2}$

【解答】 (1)　$z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと,

$$F(z)=\frac{1}{iz}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+2}=\frac{2}{i(z^2+1+4z)}=\frac{2}{i(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$$

となるので，$F(z)$ は単位円内に 1 次の極 $-2+\sqrt{3}$ をもつ．この極に対して，式 (3.19) より,

$$\mathrm{Rss}(F,-2+\sqrt{3})=\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}(z+2-\sqrt{3})\frac{2}{i(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}=\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\frac{2}{i(z+2+\sqrt{3})}=\frac{1}{i\sqrt{3}}$$

となるので,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+2}=2\pi i\cdot\frac{1}{2i\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(2)　$z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと,

$$F(z)=\frac{1}{iz}\frac{1}{\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)+5}=\frac{2}{3(z^2-1)+10iz}=\frac{2}{3z^2+10iz-3}=\frac{2}{(z+3i)(3z+i)}$$

となるので，$F(z)$ は単位円内に 1 次の極 $-\dfrac{i}{3}$ をもつ．この極に対して，式 (3.19) より,

$$\mathrm{Rss}\left(F,-\frac{i}{3}\right)=\lim_{z\to -i/3}\left(z+\frac{i}{3}\right)\frac{2}{(z+3i)(3z+i)}=\lim_{z\to -i/3}\frac{2}{3(z+3i)}=\frac{1}{4i}$$

となるので，

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3\sin\theta + 5} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

(3) 未

問 3.11　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

【解答】 (1) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ は，2 つの 2 位の極 i, $-i$ をもつが，$f(x)$ の上半平面にある極は i のみであり，このときの留数は，

$$\mathrm{Res}\,(f,\, i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{x\to i} \frac{d}{dx} (x-i)^2 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} = \lim_{x\to i} \frac{d}{dx} \frac{1}{(x+i)^2} = \lim_{x\to i} \frac{-2}{(x+i)^3} = -\frac{i}{4}$$

となる．これと，$f(x)$ が偶関数であることから，式 (3.25) より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(2) $f(x) = \dfrac{dx}{(1+x^2)^3}$ は，2 つの 3 位の極 i, $-i$ をもつが，$f(x)$ の上半平面にある極は i のみであり，このときの留数は，

$$\mathrm{Res}\,(f,\, i) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{x\to i} \frac{d^2}{dx^2} (x-i)^3 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2} \lim_{x\to i} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{(x+i)^3} = \frac{1}{2} \lim_{x\to i} \frac{12}{(x+i)^5} = \frac{3}{16i}$$

となる．これと，$f(x)$ が偶関数であることから，式 (3.26) より，

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \pi i \cdot \frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{16}$$

(3) $f(x) = \dfrac{dx}{1+x^6}$ は，6 つの 1 位の極 $e^{i\pi/6}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{5i\pi/6}$, $e^{7i\pi/6}$, $e^{3i\pi/2}$, $e^{11i\pi/6}$, をもつが，$f(x)$ の上半平面にある極は $e^{i\pi/6}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{5i\pi/6}$ であり，それぞれの留数は，

$$\mathrm{Res}\,(f,\, e^{i\pi/6}) = \left[\frac{1}{6x^5}\right]_{z=e^{i\pi/6}} = \frac{1}{6}e^{-5i\pi/6}$$

$$\mathrm{Res}\,(f,\, e^{i\pi/2}) = \left[\frac{1}{6x^5}\right]_{z=e^{i\pi/2}} = \frac{1}{6}e^{-5i\pi/2}$$

$$\mathrm{Res}\,(f,\, e^{5i\pi/6}) = \left[\frac{1}{6x^5}\right]_{z=e^{5i\pi/6}} = \frac{1}{6}e^{-25i\pi/2}$$

となる．これと，$f(x)$ が偶関数であることから，式 (3.25) より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{6}e^{-5i\pi/6} + \frac{1}{6}e^{-5i\pi/2} + \frac{1}{6}e^{-25i\pi/6}\right) = \frac{\pi i}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{2\pi}{3}$$

問 3.12　上半平面では $y \geqq 0$ であるから，

$$\left|e^{ibz}\right| = \left|e^{ibx}\right|\left|e^{-by}\right| = e^{-by} \leqq 1 \quad (b>0,\, y \geqq 0)$$

より，$\left|f(z)e^{ibz}\right| \leqq |f(z)|$ $(b>0,\, y\geqq 0)$ となることに注意して，公式 (3.27)〜(3.29) が成立することを確かめよ．

【解答】 未

問 3.13　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}$

【解答】 (1)　関数 $e^{iz}/(z^2+1)^2$ は上半平面で 2 位の極 i をもち，この点での留数は，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(e^{iz}/(z^2+1)^2,\,i) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{x\to i}\frac{d}{dx}(x-i)^2\cdot\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\\ &= \lim_{x\to i}\frac{ie^{ix}(x+i)^2-2e^{ix}(x+i)}{(x+i)^4} = -\frac{ie^{-1}}{2}\end{aligned}$$

となる．したがって，式 (3.28) より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \mathrm{Im}\left\{-2\pi\cdot\left(-\frac{ie^{-1}}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{e}$$

(2)